Soluții

1. a) Se arată că $A^3 = 0_3$.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $A \cdot X = X \cdot A$ rezultă $g = 0$, $d + g = 0$, $a = e + h$, $d = h$, $a + b = f + i$, $d + e = i$ şi $g + h = 0$. Se obține $g = d = h = 0$, $a = e = i$ şi $b = f$.

c) Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $X^2 = A$.

Rezultă $A \cdot X = X \cdot A$. Din **b)**, există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Din $X^2 = A$, rezultă că $\det(X) = 0$, deci $a = 0$. Se obține $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$.

2. a) $f(3) - f(1) = a\left(3^4 - 1\right) + b(3 - 1)$ şi rezultă concluzia.

b) Se obține $f(x) - f(y) = (x - y)\left(a(x + y)\left(x^2 + y^2\right) + b\right)$.

c) Cum $b - 1$ divide 1 rezultă $b \in \{0, 2\}$. Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 1,\ c = 3$. Dacă $b = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{15} \notin \mathbb{Z}$.